b) En déduire que (U_n) converge vers 0.

3°/a) Calculer U_0.

b) Prouver que $\forall n \geq 1$, on a : $(2n+3)U_n = 2n\,U_{n-1}$.

4°/ Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = \dfrac{2^{2n+2}\,n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Exercice 4 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$.

1°/ Calculer U_0, U_1, U_2.

2°/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$U_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} U_n$

3°/ Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4°/a) Montrer que $(n+1)U_{n+1} \cdot U_n$ est indépendant de n.

b) Calculer alors U_{2n+1}.

Exercice 5 :

Soit a un réel de l'intervalle $[0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \dfrac{\sin^{2n} t}{\cos t} \; dt$.

1°/a) Montrer que $\forall t \in [0, a]$, $0 \leq \dfrac{\sin^{2n} t}{\cos t} \leq \dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

b) Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq \dfrac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$.

Exercice 6 :

Soit $F(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1°/ Montrer que F est une fonction impaire.